

# XV Powiatowe Zawody Matematyczne – 13 listopada 2017 r.

## ETAP I (ZADANIA OTWARTE) WERSJA B

### Zadanie 1 ( 3 punkty )

Jeżeli dane są długości boków  $a, b, c$  trójkąta, to można obliczyć jego pole  $P_T$ , korzystając ze wzoru Herona ( Heron z Aleksandrii, I wiek n.e.):

$$P_T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

gdzie  $p = \frac{a+b+c}{2}$  jest połową obwodu trójkąta.

- Wykaż, że pole trójkąta o bokach 4, 6,  $2\sqrt{7}$  wynosi  $6\sqrt{3}$ ;
- Oblicz długość wysokości poprowadzonej na najkrótszy bok tego trójkąta;
- Wyznacz miarę kąta między bokami tego trójkąta o długości 4 i 6.

### Zadanie 2 ( 3 punkty )

W sześcianie o krawędzi 4 połączono odcinkami środki sąsiednich ścian. Utworzone w ten sposób odcinki są krawędziami pewnego ośmiościanu. Oblicz jego objętość.

### Zadanie 3 ( 3 punkty )

Jeżeli do licznika i do mianownika nieskracalnego dodatniego ułamka dodamy połowę jego mianownika, to otrzymamy  $\frac{4}{7}$ , a jeżeli od licznika i mianownika odejmiemy 2, to otrzymamy  $\frac{1}{4}$ . Wyznacz ten ułamek.

### Zadanie 4 ( 3 punkty )

Kwadrat o boku  $\sqrt{27}$  podzielono prostymi wychodzącymi z jednego wierzchołka na trzy figury o równych polach. Oblicz obwody tych figur.

### Zadanie 5 ( 3 punkty )

Wykaż, że wartość wyrażenia  $x^{-y}$  jest liczbą wymierną, jeżeli:  
 $x = \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{3}$  oraz  $y$  jest cyfrą jedności liczby  $3^{2017}$ .